

Séquence 14 : Équations

Cours complété

► Objectifs de la séquence

À la fin de cette séquence, je dois savoir :

- ✓ reconnaître une équation et utiliser son vocabulaire (membre, inconnue, solution) ;
- ✓ tester si un nombre donné est solution d'une équation ;
- ✓ résoudre une équation du premier degré du type $ax + b = cx + d$;
- ✓ mettre un problème en équation et le résoudre.

1. Égalité et équation

1.1 Vocabulaire

◆ Définition — Équation

Une **équation** est une **égalité** dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus, désignés par une lettre (souvent x).

- Le **membre de gauche** est l'expression **située avant le signe =**.
- Le **membre de droite** est l'expression **située après le signe =**.
- La lettre est appelée l'**inconnue** de l'équation.

☞ Exemple — Repérer le vocabulaire

On considère l'équation : $3x + 5 = 2x - 1$.

Membre de gauche : $3x + 5$. Membre de droite : $2x - 1$.

L'inconnue de cette équation est x .

1.2 Solution d'une équation

◆ Définition — Solution

Une **solution** d'une équation est un nombre qui, lorsqu'on le substitue à l'inconnue, rend l'égalité **vraie**.

Résoudre une équation, c'est trouver **toutes ses solutions** (ou prouver qu'elle n'en a pas).

→ Méthode — Tester si un nombre est solution

1. Calculer le membre de gauche en remplaçant l'inconnue par ce nombre.
2. Calculer le membre de droite en remplaçant l'inconnue par ce nombre.
3. Comparer : si les deux résultats sont **égaux**, le nombre **est solution** (✓) ; sinon il **ne l'est pas** (X).

☞ Exemple — Test

Le nombre -6 est-il solution de $3x + 5 = 2x - 1$?

- Membre de gauche : $3 \times (-6) + 5 = -18 + 5 = -13$.
- Membre de droite : $2 \times (-6) - 1 = -12 - 1 = -13$.

Les deux membres sont égaux, donc **-6 est solution** de l'équation. ✓

2. Résolution d'une équation du premier degré

◇ Propriété — Règles de conservation d'une égalité

On ne change pas les solutions d'une équation si l'on :

- ▶ **ajoute** ou **soustrait** un même nombre aux deux membres ;
- ▶ **multiplie** ou **divise** les deux membres par un même nombre **non nul**.

✓ Remarque

Conséquence pratique : « on fait passer de l'autre côté en changeant l'opération ».

- $x + 5 = 12 \Leftrightarrow x = 12 - 5$.
- $3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3}$.

2.1 Équations du type $x + a = b$ ou $ax = b$

→ Méthode — En une étape

- $x + a = b$: on **soustrait** a aux deux membres $\rightarrow x = b - a$.
- $x - a = b$: on **ajoute** a aux deux membres $\rightarrow x = b + a$.
- $ax = b$ avec $a \neq 0$: on **divise** par $a \rightarrow x = \frac{b}{a}$.

▣ Exemple — Trois résolutions en une étape

- a) $x + 7 = 12$ b) $x - 4 = 9$ c) $5x = 35$
a) $x = 12 - 7$ donc $x = 5$
b) $x = 9 + 4$ donc $x = 13$
c) $x = \frac{35}{5}$ donc $x = 7$

2.2 Équations du type $ax + b = cx + d$

→ Méthode — En deux étapes

1. **Regrouper** les termes en x dans un membre, les nombres dans l'autre.
2. **Diviser** par le coefficient devant x pour isoler x .
3. **Vérifier** en remplaçant x par la valeur trouvée.

▣ Exemple — Résolution complète

Résolvons : $3x + 5 = 2x - 1$.

$$3x + 5 = 2x - 1$$

$$3x - 2x + 5 = -1 \quad (\text{on soustrait } 2x \text{ aux deux membres})$$

$$x + 5 = -1$$

$$x = -1 - 5 \quad (\text{on soustrait } 5 \text{ aux deux membres})$$

$$x = -6$$

Vérification : pour $x = -6$, le membre de gauche vaut -13 et celui de droite -13 aussi. ✓

Conclusion : la solution est $x = -6$.

3. Mettre un problème en équation

→ Méthode — En 4 étapes

Étape 1. Choisir l'inconnue : on note x la grandeur cherchée (avec son unité).

Étape 2. Mettre en équation : traduire l'énoncé par une égalité contenant x .

Étape 3. Résoudre l'équation.

Étape 4. Conclure par une **phrase** avec l'unité.

▣ Exemple — Problème classique

Léa pense à un nombre. Elle le multiplie par 4 puis ajoute 7. Elle obtient le même résultat qu'en multipliant ce nombre par 2 et en ajoutant 15. Quel nombre Léa a-t-elle choisi ?

① **Inconnue** : soit x le nombre choisi par Léa.

② **Mise en équation** : $4x + 7 = 2x + 15$.

③ **Résolution** : $4x - 2x = 15 - 7$

$$\text{donc } 2x = 8$$

$$\text{donc } x = 4.$$

④ **Conclusion** : Léa a choisi le nombre **4**.

★ Mémo — Ce que je dois retenir

- ▶ **Une équation est une égalité avec une inconnue. Une solution rend l'égalité vraie.**
- ▶ Pour résoudre $ax + b = cx + d$: **regrouper les x d'un côté, les nombres de l'autre, puis diviser.**
- ▶ Pour un problème : **inconnue** → **équation** → **résolution** → **phrase de conclusion.**