

Séquence 1 – Divisibilité et nombres premiers

| A la fin de cette séquence, je dois savoir : | Cours | Exercices | Je m'évalue |
|--|-------|-----------|-------------|
| - Connaître et utiliser les critères de divisibilité | II | 5 | |
| - Connaître et utiliser le vocabulaire sur les multiples et les diviseurs. | I | 1 à 4 | |
| - Déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100. | III | 6 et 7 | |
| - Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers. | IV | 8 et 9 | |
| - Résoudre des problèmes d'arithmétique | Tout | 10 | |

I- Division euclidienne, multiples et diviseurs

Définition : Division euclidienne

Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre a (le **dividende**) par un nombre b (le **diviseur**), différent de 0, c'est trouver deux nombres entiers : le **quotient q** et le **reste r** , tels que :

$$a = q \times b + r, \text{ avec } r < b.$$

Exemple : Division euclidienne de 185 par 7.

$$\begin{array}{r} 185 \\ \hline -14 \quad 7 \\ \hline 45 \\ -42 \\ \hline 3 \end{array} \quad 185 = 26 \times 7 + 3$$

Définition : Multiple et diviseur

Lorsque le reste de la division euclidienne d'un nombre a par un nombre b est 0, on dit que :

- b est un diviseur de a
- a est multiple de b
- a est divisible par b .

Exemples :

48 est un multiple de 12 car : $48 = 4 \times 12 + 0$

0 est multiple de tout nombre entier.

II- Critères de divisibilité

Propriétés : Un nombre est divisible :

- **Par 2** : lorsque son chiffre des unités est pair (0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8).
- **Par 5** : lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Par 10** : lorsque son chiffre des unités est 0.
- **Par 3** : lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- **Par 9** : lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- **Par 4** : lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Exemple : 2160

- 2160 est divisible par 2, 5 et 10 : son chiffre des unités est 0.
- 2160 est divisible par 3 et 9 : $2+1+6+0 = 9$ et 9 est divisible par 3 et 9.
- 2160 est divisible par 4 : $60 = 4 \times 15$, donc divisible par 4.

III- Nombres premiers

Définition :

Un nombre premier est un nombre entier qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarques :

- Le nombre 1 n'est pas premier, il possède un seul diviseur.
- Le nombre 2 est le seul nombre premier pair.
- Il existe une infinité de nombres premiers.

Exemples :

- 13 est un nombre premier, il ne possède que deux diviseurs : 1 et 13.
- 8 n'est pas un nombre premier, il possède 4 diviseurs : 1 ; 2 ; 4 et 8.

A connaître : Les nombres premiers jusqu'à 30.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

IV- Décomposition en facteurs premiers

Théorème :

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Méthode : Décomposons 180 en facteurs premiers :

| | | |
|-----|---|--|
| 180 | 2 | - On regarde d'abord si 180 est divisible par le premier nombre premier (2). Il l'est donc on le divise par 2. On obtient 90. |
| 90 | 2 | - On recommence avec 90 et on obtient 45. |
| 45 | 3 | - On recommence avec 45. Il n'est pas divisible par 2. On regarde donc pour le nombre premier suivant 3. Il est divisible par 3, on obtient 15. |
| 15 | 3 | - On recommence avec 15. Il n'est pas divisible par 2, mais il l'est par 3. On obtient 5. |
| 5 | 5 | - 5 n'est pas divisible par 2, on passe donc à 3. 5 n'est pas divisible par 3, on passe donc au nombre premier suivant : 5. 5 est divisible par 5, on obtient 1. |
| 1 | | - Lorsque l'on arrive à 1, la décomposition est finie. On peut donc écrire le résultat sous la forme suivante : 180 = 2 × 2 × 3 × 3 × 5. |

Décomposons 160 de la même façon :

| | |
|-----|---|
| 160 | 2 |
| 80 | 2 |
| 40 | 2 |
| 20 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

On obtient : **160 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 5**

Application pour la simplification de fractions :

Simplifions la fraction : $\frac{180}{160}$

$$\frac{180}{160} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = \frac{9}{8}$$